数理解析研究所講究録
182巻 1973年 70-85

同次調和多項式とBorel-Weilの定理

広大　　　　木幡篤孝

§1. 序

n次元ユークリッド空間R^n上のラプラシアンの固有関数の積分表示を考える。ラプラシアンの固有値が0でない固有関数の積分表示については、論文[2]の中で示したように、$n-1$次元 unite sphere S^{n-1}上の空間$\mathcal{B}(S^{n-1})$の元によって一意的に固有関数を表わすことができる。この論文ではラプラシアンの固有値が0，すなわちR^n上の調和関数について同様の問題をあつかう。固有値が0でないときと同様に、この場合も Ehrenpreis の結果[1]をヒントにポアソン積分と analogus な写像$\mathcal{F}$を定義する。(§5) §4の中で見るように、Borel-Weilの定理によって丁度この写像$\mathcal{F}$は$\Gamma(L_m)$から$\mathcal{H}^{n,m}$への同型対応を与える。ただし、$\Gamma(L_m)$は$G^c/K^c P_+$上の$SO(n,\mathbb{C})$-homogeneous holomorphic line bundle L_mのすべての holomorphic sections 全体の作る vector space であり，$\mathcal{H}^{n,m}$ は R^n 上の次数 m の同次調和多項式全体の作る Vector space である。更に，$\Gamma(L_m)$，$\mathcal{H}^{n,m}$ は $SO(n)$ 左正則表現による同値な既約表現空間であることがわかる。

一方，広義一様絶対収束する級数 $\sum_{m\geq 0} f_m$ ($f_m\in\mathcal{H}^{n,m}$) 全体の作る Vector space を $\oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$ で表わすと，§5でわかるように，$C^\infty(R^n)_\Delta=\oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$ となる。ここに $C^\infty(R^n)_\Delta$ は R^n 上の調和関数全体の作る Vector space である。

そこで我々は，写像 $\mathcal{J}$ を onto にするために，数列の空間 $\oplus\sum_{m\geq 0}\Gamma(L_m)$ を次のように定義する。$\{\varphi_{i_1\cdots i_n}:(i_1\cdots i_n)\in J_m\}$ を $\Gamma(L_m)$ の一つの basis とする（§3で定義された）とき，

$$\oplus\sum_{m\geq 0}\Gamma(L_m)=\left\{\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}\varphi_{i_1\cdots i_n}\ ;\ a_{i_1\cdots i_n}\in\mathbb{C},\ \sum_{m\geq 0}\frac{\|a_m\|}{m!}s^m<+\infty\ (\forall s>0)\right\}$$

と定義する。ただし，$\|a_m\|=\max_{(i_1\cdots i_n)\in J_m}|a_{i_1\cdots i_n}|$ とする。

すると結局，R^n 上の任意の調和関数は，$\oplus\sum_{m\geq 0}\Gamma(L_m)$ の unique な元によってポアソン積分と analogous な積分で表示されることがわかる。

§2．同次調和多項式

この章では，後の章で必要となる調和多項式についての一般的な性質を述べる。この論文では以後 $SO(n)$ を G で表わすことにする。各 non-negative integer m に対して $\mathcal{H}^{n,m}$ は，R^n 上の m 次同次調和多項式全体の作るベクトル空間を表わす。

Gの$\mathcal{H}^{n,m}$上での左正則表現τ_mは既約であり，この表現τ_mはGの subgroup H'に関して class 1 である。ただしH'は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad ; \; h \in SO(n-1, R)$$

の形の元全体から作られる群である。逆にGのH'に関して class 1 である既約表現は，ある負でない整数mが存在して，τ_mと同値となる。

P^nをR^n上の複素数を係数とする多項式全体の作る ring とし，m-homogeneous 多項式全体の作るP^nの subspace を$P^{n,m}$で表わす。このとき我々は the harmonic projection $H_p : P^{n,m} \longrightarrow \mathcal{H}^{n,m}$を次の式で定義する。

$$H_p f(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k r^{2k} (\Delta^k f)(x)}{2^k k! (n+2m-4) \cdots (n+2m-2k-2)}$$

ただし$x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$で，$r$は普通の euclidean metric に関するxの長さであり，Δは Laplace-Beltrami operator である。このとき次の exact sequence が成り立つ。（Vilenkin[7]をみよ）

$$0 \longmapsto r^2 P^{n,m-2} \longmapsto P^{n,m} \xmapsto{H_p} \mathcal{H}^{n,m} \longmapsto 0 \qquad (1)$$

群GはP^n上に left-translation として作用しており，この projection H_pは$P^{n,m}$から$\mathcal{H}^{n,m}$の上へのG-homomorphism である。この論文では各$f \in P^{n,m}$に対して$H_p(f)$のかわりに$[f]$で表わすことにする。

各負でない整数 m に対して，次の２つの条件を満たす負でない整数の multi-indices $(i_1 \cdots i_n)$ の集合 J_m が存在する。(i) $i_1+\cdots+i_n=m$ (ii) $\{[f_{i_1\cdots i_n}] : (i_1\cdots i_n)\in J_m\}$ は $\mathcal{H}^{n,m}$ の一つの basis である。ただし $f_{i_1\cdots i_n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の多項式で $f_{i_1\cdots i_n}(x)=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ $(x=(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n)$ で定義される。

§3. $SO(n,\mathbb{R})$ の Borel-Weil の定理

この章では表現 τ_m に同値な $C^\infty(SO(n,\mathbb{R})/SO(n-2,\mathbb{R}))$ の G-既約部分空間を構成する。

G の部分群 H, K を次の式で定義する.

$$H=\left\{\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & h\end{pmatrix} : h\in SO(n-2,\mathbb{R})\right\} \quad K=\left\{\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix} ; \begin{matrix} k_1\in SO(2,\mathbb{R}) \\ k_2\in SO(n-2,\mathbb{R})\end{matrix}\right\}$$

群 $SO(2,\mathbb{R})$ は等質空間 G/H 上に right-translation として次のように作用する；

$$(gH)u_\theta = g\begin{pmatrix} u_\theta & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1\end{pmatrix}H$$

ただし，$g\in G$, $u_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ -\sin\theta\ \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2,\mathbb{R})$.

このとき G/H は fibre を $SO(2,\mathbb{R})$ にもつ G/K 上の fibre bundle となる。各負でない整数 m に対して，ξ_m を次の式で定義さ

れる unitary character とする：

$$\tilde{\xi}_m(u_\theta) = e^{im\theta} \quad (u_\theta \in SO(2,R))$$

このとき我々は G/K 上の associated line bundle $\tilde{L}_m$ をもつ．$\tilde{L}_m$ 上のすべての C^∞-sections 全体の作るvector space $C^\infty(\tilde{L}_m)$ は left-translation によって G-module となり，次の G-module と isomorphic になる。

$$\{f \in C^\infty(G/H) \mid f(pu_\theta) = \tilde{\xi}_m(u_\theta)^{-1} f(p)\ ;\ p \in G/H,\ u_\theta \in SO(2,R)\}$$

この同型対応によって，我々は $C^\infty(\tilde{L}_m)$ を $C^\infty(G/H)$ の部分空間として考える。

一方 G/K は $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P_+$ に holomorphically に isomorphic な G-invariant 複素構造をもっている。ここに $G^{\mathbb{C}}$, $K^{\mathbb{C}}$ はそれぞれG，Kの複素化であり，P_+は 次の形の元全体からなる$G^{\mathbb{C}}$の部分群である．

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}(z_3^2+\cdots+z_n^2), & \frac{i}{2}(z_3^2+\cdots+z_n^2), & -z_3, & \cdots, & -z_n \\ \frac{i}{2}(z_3^2+\cdots+z_n^2), & 1+\frac{1}{2}(z_3^2+\cdots+z_n^2), & iz_3, & \cdots, & iz_n \\ z_3 & -iz_3 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ z_n, & -iz_n & 0 & & 1 \end{pmatrix} : z_3, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$$

負でない整数mに対して，我々は $K^{\mathbb{C}}P_+$ の holomorphic character ξ_m を次の式で定義する．

$$\xi_m(uz) = e^{im\theta} \quad \text{ただし } u = \begin{pmatrix} u_\theta & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \in K^{\mathbb{C}},\ z \in P_+$$

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{C}),\ u' \in SO(n-2, \mathbb{C}).$$

このとき我々は C^∞-line bundle として $\tilde{\tau}_m$ に isomorphic である $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P_+$ 上の $G^{\mathbb{C}}$-homogeneous holomorphic line bundle L_m を得る。$\Gamma(L_m)$ を L_m のすべての holomorphic sections 全体の作る vector space とすると，次の space と同一視される；
$\{f \in Hol(SO(n,\mathbb{C})) \mid f(\omega\gamma) = \xi_m^{-1}(\gamma) f(\omega),\ \omega \in SO(n,\mathbb{C}),\ \gamma \in K^{\mathbb{C}}P_+\}$.
しかもそれらの上に G は left-translation として作用する。
このようにして，我々は次の関係を得る。

$$\Gamma(L_m) \hookrightarrow C^\infty(L_m) \cong C^\infty(\tilde{\tau}_m) \hookrightarrow C^\infty(G/H)$$

ここに $\hookrightarrow$ あるいは $\cong$ は G-module inclusion または G-module isomorphism である。よく知られた Borel-Weil の定理によって，G の $\Gamma(L_m)$ 上の表現 K_m は既約であり，τ_m に同値である。

負でない整数の multi-index $(i_1 \cdots i_n)$ に対して，我々は $SO(n,\mathbb{C})$ 上の holomorphic function $\varphi_{i_1 \cdots i_n}$ を次の式で定義する．

$$\varphi_{i_1 \cdots i_n}(g) = (x_1 - iy_1)^{i_1} \cdots (x_n - iy_n)^{i_n} \quad \text{ただし } g = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \\ \vdots & \vdots & * \\ x_n & y_n & \end{pmatrix} \in SO(n,\mathbb{C}).$$

このとき，すべての $\omega \in SO(n,\mathbb{C})$，$\gamma \in K^{\mathbb{C}}P_+$ に対して，

$$\varphi_{i_1 \cdots i_n}(\omega\gamma) = \xi_m(\gamma)^{-1} \varphi_{i_1 \cdots i_n}(\omega).$$

が成り立つから，$\varphi_{i_1\cdots i_n}$ は $P(L_m)$ に含まれる。

更に，$\mathbb{C}[z_1\cdots z_n]$ を $z_1\cdots z_n$ に関する polynomial ring とし，$(z_1^2+\cdots+z_n^2)$ を $z_1^2+\cdots+z_n^2$ によって生成される $\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_n]$ の中の ideal とするとき，$P(L_m)$ を $\mathbb{C}[z_1\cdots z_n]/(z_1^2+\cdots+z_n^2)$ と同一視することができるから $\{\varphi_{i_1\cdots i_n}\,;\,(i_1\cdots i_n)\in J_m\}$ は $P(L_m)$ の一つの basis となることがわかる。この同一視は $\varphi_{i_1\cdots i_n}$ を $z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}$ と見なすことによって得られる。

§4 ポアソン積分

§2，§3 から表現 $(T_m, \mathcal{H}^{n,m})$ は表現 $(\kappa_m, P(L_m))$ に同値であることがわかるが，この章ではポアソン積分がそれらの間の intertwining operator を与えることを示す。

命題4−1．任意の $P(L_m)$ の中の holomorphic function φ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 f を次の積分で定義する．

$$f(x)=\int_{G/H} e^{i\langle x,\omega\rangle}\varphi(\omega)\,d\omega \qquad (x\in\mathbb{R}^n)$$

ここで $d\omega$ は ~~G-invariant measure~~ G/H 上の G-invariant normalized measure であり，内積 $\langle x,\omega\rangle$ は complex-bilinear inner product $\left\langle x, g\begin{pmatrix}1\\ i\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle$ $(\omega=gH)$ を表わす．このとき f は $\mathcal{H}^{n,m}$ に入る。

Proof. 各 $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $e^{i\langle x,\omega\rangle}\varphi(\omega)$ は G 上の関数として考えることができるから,

$$f(x)=\int_G e^{i\left\langle x,\, g\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle}\varphi(g)\,dg$$

となる。ただし dg は G 上の Haar mesure (normalized by $\int_G dg=1$).
dg は G 上の Haar mesure だから

$$f(x)=\int_G\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left\langle x,\, g\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle e^{i\theta}}\, e^{-im\theta}\,d\theta\right]\varphi(g)\,dg$$

$$=\frac{i^m}{m!}\int_G\left(\left\langle x,\, g\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle\right)^m\varphi(g)\,dg$$

$$=\frac{i^m}{m!}\int_{G/H}(\langle x,\omega\rangle)^m\varphi(\omega)\,d\omega$$

となるから, f は $\mathbb{R}^n$ 上の次数 m の同次多項式である。又, $\Delta(\langle x,\omega\rangle)^m=0$ であるから (ただし Δ は x に関する微分). f が $\mathcal{H}^{n,m}$ に入ることがわかる。~~故に~~命題4-1が成り立つ。

Proposition 4-1 によって, 対応 $\varphi\longmapsto f$ は $\Gamma(L_m)$ から $\mathcal{H}^{n,m}$ への線型写像 $\mathcal{F}$ を定義する。

Theorem 1. 写像 $\mathcal{F}$ は $\Gamma(L_m)$ から $\mathcal{H}^{n,m}$ の上への G-isomorphism である。

Proof. $\Gamma(L_m)$ と $\mathcal{H}^{n,m}$ はともに既約 G-module であり, 写像 $\mathcal{J}$ は G の作用と可換だから, この定理を証明するためには, $\mathcal{J}(\varphi)\neq 0$ となる $\Gamma(L_m)$ の元 φ の存在を示せばよい。実際, $\varphi=\varphi_{m,0,\dots,0}$ とすると,

$$\mathcal{J}(\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\frac{i^m}{m!}\int_G (x_1^2+y_1^2)^m\,dg\neq 0$$

ここに $$g=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \\ \vdots & \vdots & * \\ x_n & y_n & \end{pmatrix}\in G.$$

故に定理は証明された。

さて C_m を次のように置く。

$$C_m=\begin{cases}\dfrac{2^{p-1}\Gamma(p)\Gamma(2p-2)\,i^m(2m)!\,\Gamma(m+p-1)}{\Gamma(p-1)\,m!\,(2m+2p-2)!\,\Gamma(m+2p-2)} & (n\text{ が偶数 }2p\text{ のとき})\\[2ex] \dfrac{\sqrt{\pi}\,2^{p-1}\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(2p-1)\,i^m(2m)!\,2^m\Gamma(m+p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p-\frac{1}{2})\,m!\,(2m+2p-2)!\,\Gamma(m+2p-1)}\,\dfrac{2m+2p-2}{2m+2p-1}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{2} & (n\text{ が奇数 }2p+1\text{ のとき})\end{cases}$$

このとき我々は次の系をえる。

Corollary 4-2　任意の $(i_1\cdots i_n)\in J_m$ に対して,

$$\mathcal{J}(\varphi_{i_1\cdots i_n})=C_m[f_{i_1\cdots i_n}]$$

Proof. 簡単な計算によって, $\{\varphi_{i_1\cdots i_n}:(i_1\cdots i_n)\in J_m\}$,

$\{[f_{i_1\cdots i_n}] : (i_1\cdots i_n)\in J_m\}$ は ~~G~~ G の作用のもとで同値な $\Gamma(L_m)$ と $\mathcal{H}^{n,m}$ の basis であることがわかる。それ故, n, m だけに関係する 0 でない定数 C_m' が存在して, すべての $(i_1\cdots i_n)\in J_m$ に対して $\mathcal{F}(\varphi_{i_1\cdots i_n}) = C_m'[f_{i_1\cdots i_n}]$ となる。この定数を知るために, 我々は 点 $(1,0\cdots 0)\in\mathbb{R}^n$ に於ける関数 $\mathcal{F}(\varphi_{m,0\cdots 0})$ の値を計算する。Vilenkin[7] によって

$$[f_{m,0\cdots 0}](1,0\cdots 0) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma(m+n-2)}{2^m\Gamma\left(m+\frac{n-2}{2}\right)\Gamma(n-2)}$$

を得るが, 一方

$$\mathcal{F}(\varphi_{m,0\cdots 0})(1,0\cdots 0) = \frac{i^m}{m!}\int_{S^{n-1}}(\omega_1^2+\omega_2^2)^m d\omega$$

$$= \begin{cases} 2^{p-1}\Gamma(p)\dfrac{i^m\,(2m)!}{m!\,(2m+2p-2)!} & (m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2)) \\[2ex] \sqrt{\pi}\,2^{p-1}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\dfrac{i^m\,(2m)!}{m!\,(2m+2p-2)!}\dfrac{2m+2p-2}{2m+2p-1}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2} & (m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2)) \end{cases}$$

~~これと~~から結局 $C_m' = C_m$ となり, Corollary の証明を得る。

§5. 調和関数とポアソン~~変~~変換

$\Delta = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ とするとき, 微分方程式

$$\Delta f = 0 \quad , \quad f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

を考えよう。

$\Delta f=0$ を満たす C^∞-differentiable 関数 f 全体の作る vector space を $C^\infty(R^n)_\Delta$ で，広義一様絶対収束する級数 $\sum_{m\geq 0} f_m$ （$f_m \in \mathcal{H}^{n,m}$）全体の作る vector space を $\oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$ で表わすとき，次の Proposition が成り立つ．

Proposition 5-1 $\quad C^\infty(R^n)_\Delta = \oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$

Proof. 定義によって $C^\infty(R^n)_\Delta$ が $\oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$ を含むことはすぐわかる。それ故 $\oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$ が $C^\infty(R^n)_\Delta$ を含むことを示せばよい。Laplacian Δ は elliptic differential operator だから $C^\infty(R^n)_\Delta$ の各元は実解析的な関数である。よく知られているように調和関数は広義一様絶対収束する級数で次のように展開される；$\quad f=\sum_{m\geq 0} f_m \quad , f_m \in P^{n,m}$.

$\Delta f=0$ から，各 m に対して $\Delta f_m=0$ となる。それ故 f_m は $\mathcal{H}^{n,m}$ の中に入り，結局 f は $\oplus\sum_{m\geq 0}\mathcal{H}^{n,m}$ の中に入る。それ故 ~~Lemma~~ Proposition は証明された。

さて $\{\varphi_{i_1\cdots i_n} : (i_1\cdots i_n)\in J_m\}$ を §3 で定義された $\Gamma(L_m)$ の basis とする。次の条件を満たす複素係数の formal series $\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}\varphi_{i_1\cdots i_n}$ 全体の作る vector space を $\oplus\sum_{m\geq 0}\Gamma(L_m)$ で表わす；$\quad \sum_{m\geq 0}\frac{\|a_m\|}{m!}s^m<+\infty$ （すべての $s>0$ に対して）

ただし，$\|a_m\| = \max_{(i_1\cdots i_n)\in J_m}|a_{i_1\cdots i_n}|$ とする。

ここで我々は次のことを注意しておこう。$\oplus\sum_{m\geq 0}P(L_m)$ の中の元 $\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}\varphi_{i_1\cdots i_n}$ は任意の多項式 P に対して

$$\sum_{m\geq 0}\frac{|P(m)|\|a_m\|}{m!}s^m<+\infty \quad (\text{すべての } s>0 \text{ に対して})$$

を満たす。

次の proposition はポアソン積分 P が $\oplus\sum_{m\geq 0}P(L_m)$ から $C^\infty(R^n)_\Delta$ の線型写像に拡張できることを示している。

Proposition 5-2 任意の元 $\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}\varphi_{i_1\cdots i_n}\in\oplus\sum_{m\geq 0}P(L_m)$ に対し次の級数は広義一様絶対収束し，かつ f は $C^\infty(R^n)_\Delta$ に入る。

$$f(x)=\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}\int_{G/H} e^{i\langle x,\omega\rangle}\varphi_{i_1\cdots i_n}(\omega)\,d\omega$$

Proof. 負でない整数 k, m と multi index $(i_1\cdots i_n)\in J_m$ に対し，$|(\Delta^k f_{i_1\cdots i_n})(x)|\leq n^2 m^{2k} r^{m-2k}$ となる。ただし，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=r^2$ である。この不等式と，harmonic projection の定義から次の評価をえる。

$$|[f_{i_1\cdots i_n}](x)|\leq n^2 e^{\frac{m}{2}} r^m \quad (\text{すべての } (i_1\cdots i_n)\in J_m \text{ に対して})$$

さて，$r_0>0$ を fix する。$\|x\|<r_0$ となる R^n の任意の x に対して

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m}\left|a_{i_1\cdots i_n}\int_{G/H} e^{i\langle x,\omega\rangle}\varphi_{i_1\cdots i_n}(\omega)\,d\omega\right|$$

$$=\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m}|c_m a_{i_1\cdots i_n}[f_{i_1\cdots i_n}](x)|$$

$$\leqq \sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} C_m |a_{i_1\cdots i_n}| |[f_{i_1\cdots i_n}](x)|$$

$$\leqq \sum_{m\geq 0} a_n d(m) \frac{\|a_m\|}{m!} (2\sqrt{e}\, r)^m \quad (\text{ここに } d(m) = \dim \mathcal{H}^{n,m})$$

$$< \sum_{m\geq 0} a_n d(m) \frac{\|a_m\|}{m!} (2\sqrt{e}\, r_0)^m$$

ただし

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2^{p+2} p^2 \Gamma(p)\Gamma(2p-2)}{\Gamma(p-1)} & (n = 2p \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{\pi}\, 2^{p-1}(2p+1)^2 \Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(2p-1)}{\Gamma(p-\frac{1}{2})} & (n = 2p+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

dはmの多項式であるから注意によって，この級数は収束する。このようにして，Propositionの級数は広義一様絶対収束する。更に，級数の各項がR^n上の調和関数であることから，fは$C^{\omega}(R^n)_{\Delta}$に入る。故にProposition 5−2は証明された。

さて最後に，我々は$\oplus \sum_{m\geq 0} \Gamma(L_m)$から$C^{\omega}(R^n)_{\Delta}$へのポアソン変換を次の式で定義する。

$$(\mathcal{P}\varphi)(x) = \sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n} \int_{G/H} e^{i\langle x,\omega\rangle} \varphi_{i_1\cdots i_n}(\omega)\, d\omega$$

ただし，$\varphi = \sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}\varphi_{i_1\cdots i_n} \in \oplus \sum_{m\geq 0} \Gamma(L_m)$

このとき，次の定理によって，微分方程式$\Delta f = 0$のすべての解は，$\oplus \sum_{m\geq 0} \Gamma(L_m)$のある元の“ポアソン変換”によって実現されることがわかる。

Theorem 2. 写像 $\mathcal{J}$ は $\bigoplus\sum_{m\geq 0} P(2m)$ から $C^\infty(R^n)_\Delta$ の上への線型同型対応である。

Proof. Corollary 4-2, Proposition 5-2 から $\mathcal{J}$ は injective であるから、$\mathcal{J}$ が surjective であることを示せばよい。

f を $C^\infty(R^n)_\Delta$ の任意の元とする。Proposition 5-1 によって f は次の絶対収束する級数で展開される：

$$f = \sum_{m\geq 0} \sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n} [f_{i_1\cdots i_n}] \quad (a_{i_1\cdots i_n} \in \mathbb{C})$$

各項 $a_{i_1\cdots i_n}[f_{i_1\cdots i_n}]$ $((i_1\cdots i_n)\in J_m)$ は ~~次数~~ 次数 m の多項式であるから、級数 $\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} a_{i_1\cdots i_n}[f_{i_1\cdots i_n}]$ は R^n 上だけでなく、$\mathbb{C}^n$ 上でも絶対収束する。特に上の級数は $\mathbb{C}^n$ の点 $(t, \omega t, \cdots, \omega^{n-1}t)$ に於いても絶対収束する。ただし t は正の実数であり、$\omega = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ である。このとき

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} |a_{i_1\cdots i_n}| \left| [f_{i_1\cdots i_n}](t, \omega t, \cdots, \omega^{n-1}t) \right| < +\infty$$

§2 の sequence(1) が exact であることから

$$[f_{i_1\cdots i_n}] - f_{i_1\cdots i_n} \in r^2 P^{n, m-2}$$

それ故、

$$|[f_{i_1\cdots i_n}](t, \omega t, \cdots, \omega^{n-1}t)| = |f_{i_1\cdots i_n}(t, \cdots, \omega^{n-1}t)| = t^m$$

となるから $\sum_{m\geq 0}\sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} |a_{i_1\cdots i_n}| t^m < +\infty$ ($\forall t > 0$ に対して) となる。

だから，$\sum_{m\geq 0} \|a_m\| t^m < +\infty$（$\forall t>0$に対し）と成る。ここに
$\|a_m\| = \max\{|a_{i_1 \cdots i_n}| : (i_1 \cdots i_n) \in J_m\}$.

Cauchy-Hadamard の~~収~~収束判定条件から

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \sqrt[m]{\|a_m\|} = 0$$

それ故，

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \sqrt[m]{\frac{\|a_m\|}{|C_m|\, m!}} = 0$$

このことから，

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \left\|\frac{a_m}{C_m}\right\| s^m < +\infty \qquad (\forall s>0 \text{に対し})$$

今ここで，$\varphi = \sum_{m\geq 0} \sum_{(i_1\cdots i_n)\in J_m} \frac{a_{i_1\cdots i_n}}{C_m} \varphi_{i_1\cdots i_n}$ とおくと，
φは $\bigoplus_{m\geq 0} P(\mathcal{L}_m)$ の中に入り，$\mathcal{F}\varphi = f$ と成る。故に
Theorem 2は証明された。

References

[1] L. Ehrenpreis, Fourier analysis in several complex variable, Interscience, New York (1970)

[2] M. Hashizume, A. Kowata, K. Minemura and K. Okamoto, An integral representation of an eigenfunction of the laplacian on the euclidean space.

[3] M. Hashizume, K. Minemura and K. Okamoto, Harmonic functions on a symmetric space of

rank one, Hiroshima Math. J. 2 (1972)
[4] S. Helgason A duality for symmetric spaces with application to group representations, Advances in Math. 5, (1970) 1–154.
[5] B. Kostant, Lie algebra cohomology and the generalized Borel–Weil theorem. Ann. of Math. 74 (1961). 329–387.
[6] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations accosiated with symmetric spaces, Amer. J. Math., 93 (1971) 753–809
[7] N. Ya. Vilenkin, Special Functions and the theory of group representation.